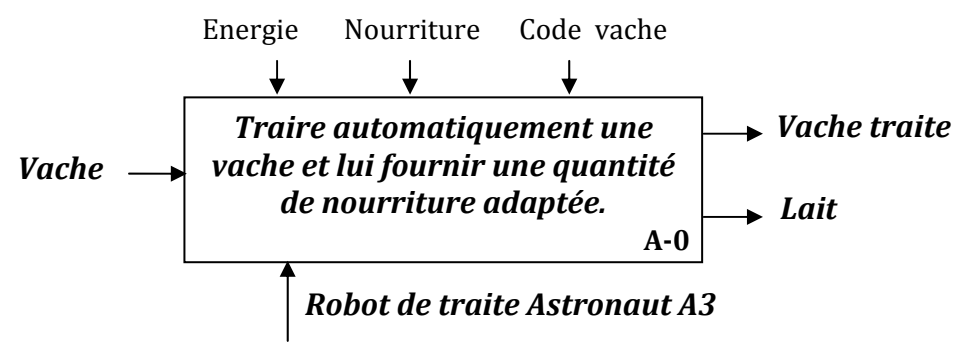


**EPREUVE DE SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGENIEUR**

**ELEMENTS DE CORRECTION**  
**ROBOT DE TRAITE AUTOMATIQUE ASTRONAUT A3**

**3. Etude fonctionnelle partielle externe et implantation du robot**

**Question 1 :** Recopier et compléter sur votre copie l'actigramme A-0 incomplet du robot de traite Astronaut A3 donné sur la figure 5 suivante.



*Figure 5 : SADT incomplet de niveau A-0 du robot de traite Astronaut A3.*

**Question 2 :** Compléter le diagramme FAST partiel du robot de traite Astronaut A3, donné sur la **figure R1** du document réponse DR1.

Voir document réponse DR1.

**4. Etude de la fonction FT10 : « Gérer la traite »**

**Question 3 :** Déterminer le nombre de traites que peut effectuer le robot sur une plage d'utilisation de 20 heures. En déduire la taille maximale du troupeau (nombre maximum de vaches) lors de l'implantation d'un robot Astronaut A3.

- 5 traites prennent :  $5 \times 6 + 4 = 34$  min
- 20 traites prennent :  $3 \times (34) + 5 \times 6 + 9 = 141$  min
- En 20 h, on peut réaliser :  $20 \times 60 / 141 = 8$  fois 20 traites il reste 72 min qui permettent de réaliser 10 traites soit 170 traites en 20 heures.
- Le troupeau peut donc contenir  $170 / 2,5 = 68$  vaches.

**Question 4 :**  
On demande de compléter le nouveau grafcet G1 de gestion des tâches fourni sur la **figure R2** du document-réponse DR2, de sorte à prendre en considération :

- Les tâches pouvant s'effectuer simultanément, plus particulièrement, après que le cycle de rinçage trayons soit terminé, on peut simultanément continuer le cycle par rinçage des canalisations, la transmission de données et le placement du bras en position attente, tout en ouvrant la porte de sortie pour libérer la vache puis la refermer et ouvrir celle de l'entrée.

- Le cas où l'intervalle entre deux traites est insuffisant et qu'alors la traite est non autorisée : la porte de sortie s'ouvre, alors, libérant la vache. Dès sa sortie du box, la porte de sortie se ferme et celle d'entrée s'ouvre.

Voir Document-réponse DR2

## 5. Etude de la fonction FT122 « Peser la vache »

**Question 5 :** a) Ecrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la statique à l'ensemble  $E=(\text{plateau}+\text{vache})$  au point  $M$ .

b) Déduire le poids  $P$  de la vache et les coordonnées  $X_G$  et  $Y_G$  de son centre de gravité  $G$ , en fonction des données, faire ensuite l'application numérique.

a) PFS appliqué à l'ensemble  $E=(\text{plateau peseur} + \text{vache})$  :

$$\{T(\bar{E} \rightarrow E)\} = \{T_M(B \rightarrow \text{Plat.})\} + \{T_N(B \rightarrow \text{Plat.})\} + \{T_K(B \rightarrow \text{Plat.})\} + \{T(\text{Pes.} \rightarrow \text{Vache})\} = \{0\}$$

$$\{T_M(B \rightarrow \text{Plat.})\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_M & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}^M, \quad \{T_N(B \rightarrow \text{Plat.})\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_N & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}^N \quad \text{et} \quad \{T_K(B \rightarrow \text{Plat.})\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_K & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}^K$$

TRS projeté sur  $\vec{z}$  :  $Z_K + Z_M + Z_N - P = 0$

TMS en  $M$  :  $\overrightarrow{MN} \wedge Z_N \cdot \vec{z} + \overrightarrow{MK} \wedge Z_K \cdot \vec{z} - \overrightarrow{MG} \wedge P \cdot \vec{z} = \vec{0}$

$$\Rightarrow b \cdot \vec{y} \wedge Z_N \cdot \vec{z} + (a \cdot \vec{x} + \frac{b}{2} \cdot \vec{y}) \wedge Z_K \cdot \vec{z} - (X_G \cdot \vec{x} + Y_G \cdot \vec{y} + h \cdot \vec{z}) \wedge P \cdot \vec{z} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow b \cdot Z_N \cdot \vec{x} - a \cdot Z_K \cdot \vec{y} + \frac{b}{2} \cdot Z_K \cdot \vec{x} + X_G \cdot P \cdot \vec{y} - Y_G \cdot P \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left[ b \cdot Z_N + \frac{b}{2} \cdot Z_K - Y_G \cdot P \right] \cdot \vec{x} + \left[ -a \cdot Z_K + X_G \cdot P \right] \cdot \vec{y} = \vec{0}$$

D'où :  $b \cdot Z_N + \frac{b}{2} \cdot Z_K - Y_G \cdot P = 0$  et  $-a \cdot Z_K + X_G \cdot P = 0$

c)  $P = Z_K + Z_M + Z_N$  AN :  $P = 600 \text{ daN}$

$$X_G = \frac{a \cdot Z_K}{P} = \frac{a \cdot Z_K}{Z_K + Z_M + Z_N} \quad \text{AN : } X_G = 0,44 \text{ m}$$

$$Y_G = \frac{b \cdot Z_N}{P} + \frac{b \cdot Z_K}{2P} = \frac{2b \cdot Z_N + b \cdot Z_K}{2(Z_K + Z_M + Z_N)} \quad \text{AN : } Y_G = 1,5 \text{ m}$$

## 6. Etude de la fonction FT131 : «Mettre en position les organes nécessaires à la traite»

### 6.1. Etude hyperstatique

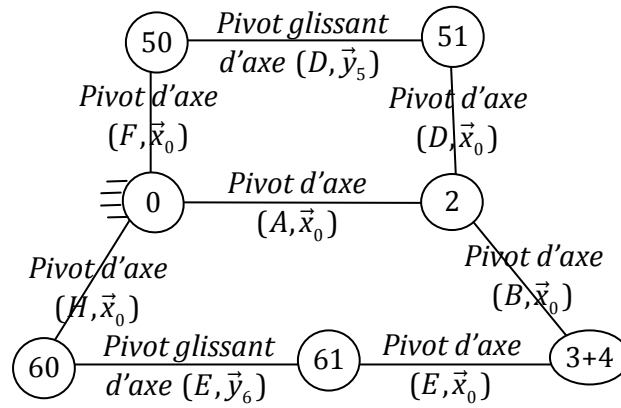
**Question 6 :** a) Dresser le graphe de liaisons du bras de robot.

b) Donner, en spécifiant les mouvements concernés, les mobilités utile et interne du système.

c) Calculer le degré d'hyperstatisme  $h$  du système. Quelle est l'influence de cette valeur de  $h$  sur la réalisation du système ?

d) Dans le cas où le mécanisme est hyperstatique, proposer une solution pour le rendre isostatique sachant que seules les liaisons en  $D$ ,  $E$ ,  $F$  et  $H$  peuvent être modifiées.

a) Le graphe de liaisons du bras de robot :



b) Mobilité :  $m = m_u + m_i$

Mobilité utile :  $m_u = 2$  (les mouvements de translation des deux vérins V5 et V6).

Mobilité interne :  $m_i = 0$ .

c) Degré d'hyperstatisme :  $h = m + E_c - I_c = 2 + 6 \times 2 - 10 = 4$ .

Influence de  $h$  : système rigide mais nécessite 4 contraintes dimensionnelles et/ou géométriques à respecter lors de sa réalisation pour que le système puisse être monté et fonctionner.

d) Solution isostatique :

On remplace les liaisons en D, E, F et H par des liaisons sphériques. En effet :

$m_i$  devient 4, donc  $m = 6$  et  $h = m + E_c - I_c = 6 + 6 \times 2 - 18 = 0$ , on obtient ainsi un système isostatique.

**6.2. Etude cinématique**

**Question 7 :**

- a) Représenter, à l'échelle proposée, le vecteur vitesse  $\vec{V}(D \in 51 / 50)$ .
- b) Par composition des vitesses en D, déterminer les vecteurs vitesses  $\vec{V}(D \in 50 / 0)$  et  $\vec{V}(D \in 2 / 0)$ .
- c) Déterminer le vecteur vitesse  $\vec{V}(B \in 2 / 0)$ .
- d) Déterminer la direction du vecteur vitesse  $\vec{V}(E \in 3 / 0)$ .
- e) Déterminer le centre instantané de rotation  $I_{30}$  du mouvement de (3) par rapport à (0).
- f) Déterminer le vecteur vitesse  $\vec{V}(G_4 \in 4 / 0)$ , donner sa norme.

a)  $\vec{V}(D \in 51 / 50)$  est portée par FD, voir DR 3

b) Par composition des vitesses en D :

$$\vec{V}(D \in 2 / 0) = \vec{V}(D \in 2 / 51) + \vec{V}(D \in 51 / 50) + \vec{V}(D \in 50 / 0)$$

$$\vec{V}(D \in 2 / 0) \perp (AD) \text{ car } A \equiv \text{CIR du mouvement de } 1/0.$$

$$\vec{V}(D \in 51 / 50) \text{ déjà tracée}$$

$$\vec{V}(D \in 50 / 0) \perp (FD) \text{ car } F \equiv \text{CIR du mouvement de } 50/0.$$

En traçant le parallélogramme on détermine complètement les vitesses  $\vec{V}(D \in 50 / 0)$  et  $\vec{V}(D \in 2 / 0)$ .

c) Vecteur vitesse  $\vec{V}(B \in 2 / 0)$ .

$$\vec{V}(B \in 2 / 0) \perp (AB) \text{ car } A \equiv \text{CIR du mouvement de } 1/0.$$

La vitesse varie linéairement le long de (ADE), d'où  $\vec{V}(B \in 2/0)$ .

d) Direction du vecteur vitesse  $\vec{V}(E \in 3/0)$ .

$$\vec{V}(E \in 3/0) = \vec{V}(E \in 3/6) + \vec{V}(E \in 6/0) \perp (HE) \text{ car } H \equiv \text{CIR du mouvement de } 6/0.$$

e) Centre instantané de rotation  $I_{30}$  du mouvement de (3) par rapport à (0).

$$\text{On a : } \vec{V}(B \in 3/0) = \vec{V}(B \in 3/2) + \vec{V}(B \in 2/0)$$

$$I_{30} = (\perp \vec{V}(B \in 3/0)) \cap (\perp \vec{V}(E \in 3/0)) \text{ c.à.d. } I_{30} = (AB) \cap (HE).$$

Ou bien en faisant usage du théorème des 3 plans glissants :  $I_{30} = (I_{32} I_{20}) \cap (I_{36} I_{60})$  c.à.d.  $I_{30} = (BA) \cap (EH)$

f) Vecteur vitesse  $\vec{V}(G_4 \in 4/0)$

$$\vec{V}(G_4 \in 4/0) \perp (I_{30} G_4)$$

$$\text{Soit } J \text{ le point de } (I_{30} B) \text{ tel que : } I_{30} B' = I_{30} G_4, \text{ alors : } \|\vec{V}(G_4 \in 4/0)\| = \|\vec{V}(J \in 3/0)\| ;$$

La vitesse varie linéairement le long de  $(I_{30} JB)$ , d'où :  $\vec{V}(J \in 3/0)$  et  $\vec{V}(G_4 \in 4/0)$ .

### 6.3. Etude du guidage en translation du chariot 1

**Question 8 :**

a) En se plaçant à la limite de glissement et en appliquant les lois de Coulomb, tracer, en justifiant, les supports des actions mécaniques du bâti (0) sur l'ensemble (E) en M et N.

b) Déterminer graphiquement la position limite  $L_{lim}$  du point K qui assure l'équilibre strict (limite) de l'ensemble E.

c) A l'aide d'une analyse géométrique, déterminer  $L_{lim}$  en fonction de  $f$  et des données.

d) Donner la condition sur la distance  $L$  pour éviter tout risque de coincement (arc-boutement) du chariot 1 par rapport au bâti (0). Justifier.

a) En se plaçant à la limite de glissement (ou à l'équilibre strict), les lois de Coulomb disent que les supports des actions mécaniques  $\vec{R}_M$  et  $\vec{R}_N$  du bâti (0) sur l'ensemble (E) en M et N font l'angle  $\varphi$  avec leurs normales de contact en M et N de sorte que leurs composantes tangentielles  $\vec{T}_M$  et  $\vec{T}_N$  soient opposées aux vitesses de glissement en M et N (respectivement) portées par  $(+\vec{x}_0)$ . Les efforts normaux étant dirigés vers la matière de l'ensemble E.

b) L'équilibre est assuré si les trois forces  $\vec{R}_M$ ,  $\vec{R}_N$  et  $\vec{F}$  aux quelles est soumis l'ensemble (E) sont concourants ( et que leur somme vectorielle est nulle). L'intersection des actions  $\vec{R}_M$  et  $\vec{R}_N$  définit la position limite  $L_{lim}$ .

$$\text{c) On a : } h = \left( L_{lim} + \frac{e}{2} \right) \tan \varphi + \left( L_{lim} - \frac{e}{2} \right) \tan \varphi = 2L_{lim} \tan \varphi = 2L_{lim} f \Rightarrow L_{lim} = \frac{h}{2f}$$

d) Pour éviter tout risque de coincement (arc-boutement) du chariot 1 par rapport au bâti (0) il faudra que  $L < L_{lim}$ . En effet, pour qu'il y ait coincement (c.à.d. équilibre) il faudra que les 3 forces appliquées à (E) soient concourantes comme c'est déjà dit et pour que ceci puisse se faire il faut que les actions  $\vec{R}_M$ ,  $\vec{R}_N$  fassent un angle supérieur à  $\varphi$  avec leurs normales de contact en M et N (hors cône de frottement) chose qui est impossible d'après les lois de Coulomb.

**6.4. Dimensionnement des actionneurs**

**Question 9 :**

a) Déterminer les composantes du vecteur position  $\overrightarrow{BG_3}$  du centre d'inertie  $G_3$  du bras 3.

b) Donner, en justifiant, la forme simplifiée de la matrice d'inertie  $\overline{\overline{I}}(B,3)$  dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .

c) Exprimer en fonction des données, et dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , la matrice d'inertie  $\overline{\overline{I}}(G_{31}, 31)$ . En déduire la matrice d'inertie  $\overline{\overline{I}}(B, 31)$  dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .

d) Exprimer en fonction des données, et dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , les matrices d'inertie  $\overline{\overline{I}}(G_{32}, 32)$  et  $\overline{\overline{I}}(G_{33}, 33)$ . En déduire les matrices d'inertie  $\overline{\overline{I}}(B, 32)$  et  $\overline{\overline{I}}(B, 33)$ .

e) Déduire l'expression de la matrice d'inertie  $\overline{\overline{I}}(B, 3)$  dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .

a) les composantes  $X_{G_3}$ ,  $Y_{G_3}$  et  $Z_{G_3}$  du centre d'inertie  $G_3$  du bras 3.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BG_3} &= X_{G_3} \cdot \vec{x}_0 + Y_{G_3} \cdot \vec{y}_3 + Z_{G_3} \cdot \vec{z}_3 \\ &= \frac{1}{(m_{31} + 2m_{32})} \cdot (m_{31} \overrightarrow{BG_{31}} + m_{32} \overrightarrow{BG_{32}} + m_{33} \overrightarrow{BG_{33}}) \\ &= \frac{1}{(m_{31} + 2m_{32})} \cdot \left\{ -m_{31} \frac{b}{2} \vec{z}_3 + m_{32} \left( \frac{a}{2} \vec{x}_0 - \frac{h}{2} \vec{y}_3 - \frac{b}{2} \vec{z}_3 \right) + m_{33} \left( -\frac{a}{2} \vec{x}_0 - \frac{h}{2} \vec{y}_3 - \frac{b}{2} \vec{z}_3 \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{(m_{31} + 2m_{32})} \cdot \left\{ m_{31} \frac{b}{2} \vec{z}_3 + m_{32} (h\vec{y}_3 + b\vec{z}_3) \right\} \\ &= -\frac{1}{(m_{31} + 2m_{32})} \cdot \left\{ (m_{31}/2 + m_{32}) b\vec{z}_3 + m_{32} h\vec{y}_3 \right\} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BG_3} = -\frac{m_{32}}{m_3} \cdot h \cdot \vec{y}_3 - \frac{b}{2} \cdot \vec{z}_3$$

$$\text{D'où ; } X_{G_3} = 0 \quad ; \quad Y_{G_3} = -\frac{m_{32}h}{m_3} \quad ; \quad Z_{G_3} = -\frac{b}{2}$$

b) Forme simplifiée de la matrice d'inertie  $\overline{\overline{I}}(B, 3)$ .

La géométrie du bras intermédiaire 3 présente un plan de symétrie  $(B, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , donc :

$$\overline{\overline{I}}(B, 3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & -D_3 \\ 0 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

c) Matrice d'inertie  $\overline{\overline{I}}(G_{31}, 31)$  et  $\overline{\overline{I}}(B, 31)$

$$\overline{\overline{I}}(G_{31}, 31) = \frac{m_{31}}{12} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)} \quad ;$$

D'après Huygens on a :  $\overline{\overline{I}}(B, 31) = \overline{\overline{I}}(G_{31}, 31) + \overline{\overline{I}}(B, \{G_{31}, m_{31}\})$

$$\text{Et puisque : } \overrightarrow{BG_{31}} = -\frac{b}{2} \vec{z}_3, \text{ alors : } \overline{\overline{I}}(B, \{G_{31}, m_{31}\}) = \begin{pmatrix} m_{31} b^2 / 4 & 0 & 0 \\ 0 & m_{31} b^2 / 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

$$D'o\grave{u} : \bar{\bar{I}}(B,31) = \begin{pmatrix} m_{31} \frac{b^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & m_{31} \left( \frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{31} \frac{a^2}{12} \end{pmatrix}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

d) Matrices d'inertie :  $\bar{\bar{I}}(G_{32},32)$ ,  $\bar{\bar{I}}(G_{33},33)$ ,  $\bar{\bar{I}}(B,32)$  et  $\bar{\bar{I}}(B,33)$ .

$$\bar{\bar{I}}(G_{32},32) = \bar{\bar{I}}(G_{33},33) = \frac{m_{32}}{12} \begin{pmatrix} h^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

On a :  $\overrightarrow{BG_{32}} = a/2 \cdot \bar{x}_0 - h/2 \cdot \bar{y}_3 - b/2 \cdot \bar{z}_3$  et  $\overrightarrow{BG_{33}} = -a/2 \cdot \bar{x}_0 - h/2 \cdot \bar{y}_3 - b/2 \cdot \bar{z}_3$

Donc :

$$\bar{\bar{I}}(B,32) = \begin{pmatrix} \frac{m_{32}}{12}(h^2 + b^2) + \frac{m_{32}}{4}(h^2 + b^2) & m_{32} \frac{ah}{4} & m_{32} \frac{ab}{4} \\ m_{32} \frac{ah}{4} & \frac{m_{32}}{12}b^2 + \frac{m_{32}}{4}(a^2 + b^2) & -m_{32} \frac{bh}{4} \\ m_{32} \frac{ab}{4} & -m_{32} \frac{bh}{4} & \frac{m_{32}}{12}h^2 + \frac{m_{32}}{4}(a^2 + h^2) \end{pmatrix}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{I}}(B,32) = \begin{pmatrix} \frac{m_{32}}{3}(h^2 + b^2) & m_{32} \frac{ah}{4} & m_{32} \frac{ab}{4} \\ m_{32} \frac{ah}{4} & m_{32} \left( \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3} \right) & -m_{32} \frac{bh}{4} \\ m_{32} \frac{ab}{4} & -m_{32} \frac{bh}{4} & m_{32} \left( \frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \end{pmatrix}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

$$\text{De m\^eme : } \bar{\bar{I}}(B,33) = \begin{pmatrix} \frac{m_{33}}{3}(h^2 + b^2) & -m_{33} \frac{ah}{4} & -m_{33} \frac{ab}{4} \\ -m_{33} \frac{ah}{4} & m_{33} \left( \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3} \right) & -m_{33} \frac{bh}{4} \\ -m_{33} \frac{ab}{4} & -m_{33} \frac{bh}{4} & m_{33} \left( \frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \end{pmatrix}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

e) Matrice d'inertie  $\bar{\bar{I}}(B,3)$

$$\bar{\bar{I}}(B,3) = \bar{\bar{I}}(B,31) + \bar{\bar{I}}(B,32) + \bar{\bar{I}}(B,33)$$

$$\bar{\bar{I}}(B,3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & -D_3 \\ 0 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} A_3 = m_{31} \frac{b^2}{3} + \frac{m_{32} + m_{33}}{3} (h^2 + b^2) & ; & B_3 = m_{31} \left( \frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{3} \right) + (m_{32} + m_{33}) \left( \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3} \right) \\ C_3 = m_{31} \frac{a^2}{12} + (m_{32} + m_{33}) \left( \frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & ; & D_3 = (m_{32} + m_{33}) \frac{bh}{4} \end{cases}$$

**Question 10 :** a) Déterminer le torseur cinétique, au point B, du bras (3) dans son mouvement / à  $R_0$ .  
 b) Déterminer la projection sur  $\vec{x}_0$  des éléments de réduction du torseur cinétique, au point B, de la tête (4) dans son mouvement / à  $R_0$ .

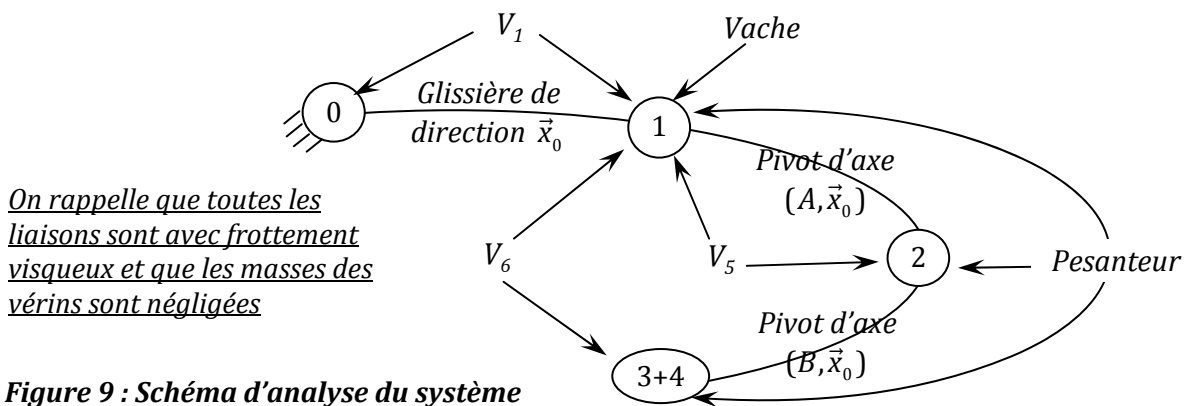
a) Torseur cinétique, au point B, du bras (3) dans son mouvement / à  $R_0$ .

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}(S_3/R_0)\}_B &= \begin{Bmatrix} \vec{R}_c(S_3/R_0) \\ \vec{\sigma}(B, S_3/R_0) \end{Bmatrix} \\ \vec{R}_c(S_3/R_0) &= m_3 \vec{V}(G_3 \in S_3/R_0) = m_3 \left( \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2 + \frac{L_3}{2} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{y}_3 \right) \\ \vec{\sigma}(B, S_3/R_0) &= m_3 \overrightarrow{BG_3} \wedge \vec{V}(B \in S_3/R_0) + \overline{I}(B, 3) \cdot \vec{\Omega}(3/0) \\ &= -m_3 \frac{L_3}{2} \vec{z}_3 \wedge (\dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2) + A_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{x}_0 \\ &= -\frac{m_3 \cdot L_3}{2} (\dot{x} \cdot \vec{y}_3 - L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \vec{x}_0) + A_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{x}_0 \\ &= [A_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + \frac{1}{2} m_3 L_3 L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3] \cdot \vec{x}_0 - \frac{1}{2} m_3 L_3 \dot{x} \cdot \vec{y}_3 \end{aligned}$$

b) Torseur cinétique, au point B, de la tête (4) dans son mouvement / à  $R_0$ .

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}(S_4/R_0)\}_B &= \begin{Bmatrix} \vec{R}_c(S_4/R_0) \\ \vec{\sigma}(B, S_4/R_0) \end{Bmatrix} \\ \vec{x}_0 \cdot \vec{R}_c(S_4/R_0) &= \vec{x}_0 \cdot m_4 \vec{V}(G_4 \in S_4/R_0) = m_4 \cdot \dot{x} \\ \vec{x}_0 \cdot \vec{\sigma}(B, S_4/R_0) &= \vec{x}_0 \cdot \vec{\sigma}(G_4, S_3/R_0) + \vec{x}_0 \cdot (\overrightarrow{BG_4} \wedge m_4 \vec{V}(G_4 \in S_4/R_0)) \\ &= A_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - m_4 (\vec{x}_0 \wedge (L_3 \vec{z}_3 + L_4 \vec{y}_3)) \cdot \vec{V}(G_4 \in S_4/R_0) \\ &= A_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - m_4 (L_4 \vec{z}_3 - L_3 \vec{y}_3) \cdot (\dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 + L_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{y}_3 - L_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{z}_3) \\ &= [A_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + m_4 ((L_3^2 + L_4^2) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + L_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot (L_3 \sin \theta_3 - L_4 \cos \theta_3))] \end{aligned}$$

On donne le schéma d'analyse du système sur la figure 9 suivante :



Les lois de mouvement étant connues on désire dimensionner les vérins  $V_1$ ,  $V_5$  et  $V_6$  permettant de réaliser ces lois de mouvement.

**Question 11 :** Sans développer les termes dynamiques, écrire les équations permettant de déterminer les actions mécaniques des vérins :  $F_1$ ,  $F_5$  et  $F_6$ . Indiquer, clairement, le(s) système(s) à isoler, le(s) théorème(s) à utiliser.

**Détermination de  $F_1$  :** On isole l'ensemble  $E_1=(S_1+S_2+S_3+S_4)$ ,

$$\{\overline{E_1} \rightarrow E_1\} = \underbrace{\{V_1 \rightarrow S_1\}}_{\vec{R}(V_1 \rightarrow S_1), \vec{x}_0 = F_1} + \underbrace{\{Vache \rightarrow S_1\}}_{\vec{R}(Vache \rightarrow S_1), \vec{x}_0 = -F_p} + \underbrace{\{S_0 \rightarrow S_1\}}_{\vec{R}(S_0 \rightarrow S_1), \vec{x}_0 = -f_{01} \cdot \dot{x}} + \underbrace{\{Pes. \rightarrow E_1\}}_{\vec{R}(Pes. \rightarrow E_1), \vec{x}_0 = 0}$$

TRD en projection sur  $\vec{x}_0$  :

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{R}_D(E_1 / R_0) = F_1 - F_p - f_{01} \cdot \dot{x}$$

$$F_1 = \vec{x}_0 \cdot \vec{R}_D(E_1 / R_0) + F_p + f_{01} \cdot \dot{x}$$

**Détermination de  $F_6$  :**

• On isole l'ensemble  $E_2=(S_3+S_4)$

$$\{\overline{E_2} \rightarrow E_2\} = \underbrace{\{S_2 \rightarrow S_3\}}_{\vec{M}_B(S_2 \rightarrow S_3), \vec{x}_0 = -f_{23} \cdot \dot{\theta}_3} + \underbrace{\{V_6 \rightarrow S_3\}}_{\substack{F_6 \vec{y}_6 \\ \vec{0}}} + \{Pes. \rightarrow E_2\}$$

TMD au point B en projection sur  $\vec{x}_0$  :

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(B, E_2 / R_0) = \vec{x}_0 \cdot (\overrightarrow{BE} \wedge F_6 \cdot \vec{y}_6 - \overrightarrow{BG_3} \wedge m_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 - (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG_4}) \wedge m_4 \cdot g \cdot \vec{z}_0) - f_{23} \cdot \dot{\theta}_3$$

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(B, E_2 / R_0) = a_3 F_6 \cos(\theta_6 - \theta_2 - \theta_3) - m_3 g \frac{L_3}{2} \sin(\theta_2 + \theta_3) + m_4 g (-L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_4 \cos(\theta_2 + \theta_3)) - f_{23} \cdot \dot{\theta}_3$$

$$F_6 = \frac{\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(B, E_2 / R_0) + \left(\frac{m_3}{2} + m_4\right) g L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) - m_4 g L_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) + f_{23} \cdot \dot{\theta}_3}{a_3 \cos(\theta_6 - \theta_2 - \theta_3)}$$

**Détermination de  $F_5$  :**

On isole l'ensemble  $E_3=(S_2+S_3+S_4)$

$$\{\overline{E_3} \rightarrow E_3\} = \underbrace{\{S_1 \rightarrow S_2\}}_{\vec{M}_A(S_1 \rightarrow S_2), \vec{x}_0 = -f_{12} \cdot \dot{\theta}_2} + \underbrace{\{V_5 \rightarrow S_2\}}_{\substack{F_5 \vec{y}_5 \\ \vec{0}}} + \underbrace{\{V_6 \rightarrow S_3\}}_{\substack{F_6 \vec{y}_6 \\ \vec{0}}} + \{Pes. \rightarrow E_3\}$$

TMD au point A en projection sur  $\vec{x}_0$  :

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(A, E_3 / R_0) = \vec{x}_0 \cdot (\overrightarrow{AD} \wedge F_5 \cdot \vec{y}_5 + \overrightarrow{AE} \wedge F_6 \cdot \vec{y}_6 - \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0 - \overrightarrow{AG_3} \wedge m_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 - \overrightarrow{AG_4} \wedge m_4 \cdot g \cdot \vec{z}_0) - f_{12} \cdot \dot{\theta}_2$$

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(A, E_3 / R_0) = a_2 F_5 \sin(\theta_5 - \theta_2) + h_6 F_6 \cos \theta_5 - f_{21} \dot{\theta}_2 - m_2 g \frac{L_2}{2} \cos \theta_2 - m_3 g \left( L_2 \cos \theta_2 + \frac{L_3}{2} \sin(\theta_2 + \theta_3) \right) - m_4 \cdot g \cdot (L_2 \cos \theta_2 + L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) - L_4 \cos(\theta_2 + \theta_3))$$

$$F_5 = \frac{\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(A, E_3 / R_0) - h_6 F_6 \cos \theta_5 + f_{21} \dot{\theta}_2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4\right) g L_2 \cos \theta_2 + \left(\frac{m_3}{2} + m_4\right) g L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + m_4 g L_4 \cos(\theta_2 + \theta_3)}{a_2 \sin(\theta_5 - \theta_2)}$$



**Question 12 :** En calculant les termes dynamiques, déterminer complètement  $F_1$  et  $F_6$  en fonction des données.

Détermination complète de  $F_1$  :

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 \cdot \vec{R}_D(E_1 / R_0) &= \frac{d}{dt} (\vec{x}_0 \cdot \vec{R}_C(E_1 / R_0)) = \frac{d}{dt} (\vec{x}_0 \cdot \vec{R}_C(S_1 / R_0) + \vec{x}_0 \cdot \vec{R}_C(S_2 / R_0) + \vec{x}_0 \cdot \vec{R}_C(S_3 / R_0) + \vec{x}_0 \cdot \vec{R}_C(S_4 / R_0)) \\ &= (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cdot \ddot{x} \end{aligned}$$

$$F_1 = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \ddot{x} + f_{01} \cdot \dot{x} + F_p$$

Détermination complète de  $F_6$  :

$$F_6 = \frac{\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(B, E_2 / R_0) + \left( \frac{m_3}{2} + m_4 \right) g L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) - m_4 g L_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) + f_{23} \cdot \dot{\theta}_3}{a_3 \cos(\theta_6 - \theta_2 - \theta_3)}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(B, E_2 / R_0) &= \vec{x}_0 \cdot \left( \frac{d\vec{\sigma}(B, E_2 / R_0)}{dt} \right)_{R_0} + \vec{x}_0 \cdot (m_{E_2} \vec{V}(B / R_0) \wedge \vec{V}(G_{E_2} / R_0)) \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(B, E_2 / R_0) \cdot \vec{x}_0) + (\vec{x}_0 \wedge \vec{V}(B / R_0)) \cdot (m_3 \vec{V}(G_3 \in S_3 / R_0) + m_4 \vec{V}(G_4 \in S_4 / R_0)) \\ \vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(B, E_2 / R_0) &= \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(B, E_2 / R_0) \cdot \vec{x}_0) + (\vec{x}_0 \wedge L_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2) \cdot (m_3 \vec{V}(G_3 \in S_3 / R_0) + m_4 \vec{V}(G_4 \in S_4 / R_0)) \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(B, E_2 / R_0) \cdot \vec{x}_0) - L_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{y}_2 \cdot \left( \begin{aligned} &m_3 \left( \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2 + \frac{L_3}{2} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{y}_3 \right) + \\ &m_4 \left( \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2 + L_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{y}_3 - L_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{z}_3 \right) \end{aligned} \right) \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(B, E_2 / R_0) \cdot \vec{x}_0) - L_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \left( \frac{1}{2} m_3 L_3 \cos \theta_3 + m_4 (L_3 \cos \theta_3 + L_4 \sin \theta_3) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(B, E_2 / R_0) \cdot \vec{x}_0 &= \vec{\sigma}(B, S_3 / R_0) \cdot \vec{x}_0 + \vec{\sigma}(B, S_4 / R_0) \cdot \vec{x}_0 \\ &= \left[ (A_3 + \frac{1}{2} m_3 L_3^2) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + \frac{1}{2} m_3 L_3 L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \right] + \\ &\quad \left[ A_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + m_4 \left( (L_3^2 + L_4^2) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + L_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot (L_3 \sin \theta_3 - L_4 \cos \theta_3) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(B, E_2 / R_0) &= (A_3 + A_4 + \frac{1}{2} m_3 L_3^2 + m_4 (L_3^2 + L_4^2)) (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + \left[ \frac{1}{2} m_3 L_3 \sin \theta_3 + m_4 (L_3 \sin \theta_3 - L_4 \cos \theta_3) \right] L_2 \ddot{\theta}_2 \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} m_3 L_3 \cos \theta_3 + m_4 L_2 (L_3 \cos \theta_3 + L_4 \sin \theta_3) \right) L_2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

**7. Etude de la fonction FT135 : « Réguler et asservir la position des organes de traite »**

Le cahier des charges partiel décrivant les performances associées au chariot 1 est le suivant :

Fonction	Critères	Niveaux et éventuelle flexibilité
FT 135	<b>Axe N° 1 (translation du chariot 1 par rapport au bâti)</b>	
	Stabilité de l'axe	Marge de phase : MP ≥ 45°
	Amortissement de l'axe	Aucun dépassement transitoire permis
	Précision de positionnement de l'axe	- Insensibilité à une perturbation impulsion. - Ecart statique (écart en régime permanent suite à un échelon de position) nul .
	Rapidité de l'axe	Pulsation de coupure à 0dB (ou de gain unité): ω <sub>c0</sub> = 10 rad.s <sup>-1</sup>

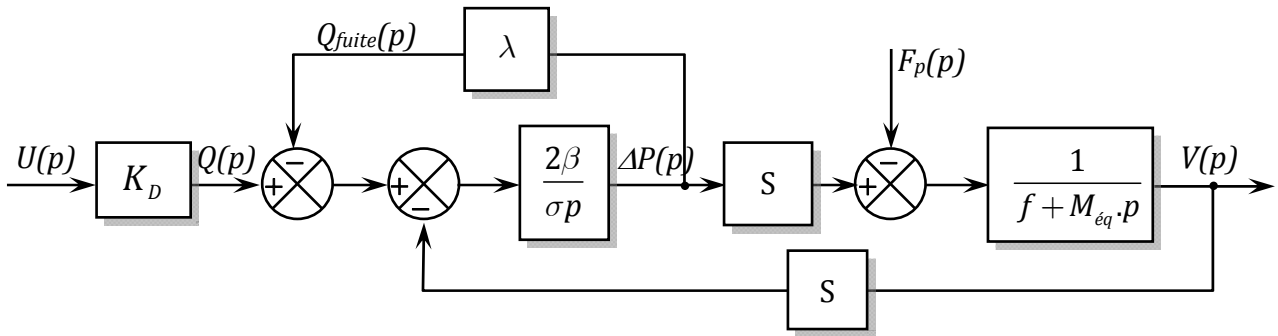
**7.1. Modélisation des systèmes électro-hydrauliques**

**Question 13 :** En supposant les conditions initiales nulles, écrire les équations (1), (2), (3) et (4) dans le domaine de Laplace, puis recopier et compléter le schéma-blocs de la figure 11.

(1) :  $q(t) = K_D \cdot u(t) \Rightarrow Q(p) = K_D \cdot U(p)$ .      (2)  $q_{fuite}(t) = \lambda(P_a(t) - P_b(t)) \Rightarrow Q_{fuite}(t) = \lambda(P_a(p) - P_b(p))$

(3) :  $q(t) = S \cdot v(t) + \frac{\sigma}{2\beta} \cdot \frac{d\Delta P(t)}{dt} + \lambda \Delta P(t) \Rightarrow Q(p) = S \cdot V(p) + \frac{\sigma}{2\beta} p \cdot \Delta P(p) + \lambda \cdot \Delta P(p)$ .

(4) :  $M_{\acute{e}q} \frac{dv(t)}{dt} = S \cdot \Delta P(t) - f \cdot v(t) - F_p(t) \Rightarrow M_{\acute{e}q} \cdot p \cdot V(p) = S \cdot \Delta P(p) - f \cdot V(p) - F_p(p)$ .



**Figure 11 :** Schéma-bloc de l'ensemble « vérin + charge »

**Question 14 :** a) Écrire la fonction de transfert  $\frac{V(p)}{U(p)}$  pour  $F_p(p) = 0$  sous la forme  $\frac{K_u}{1 + Ap + Bp^2}$  où les termes A, B et  $K_u$  seront explicités.

b) Écrire la fonction de transfert  $\frac{V(p)}{F_p(p)}$  pour  $U(p) = 0$  sous la forme  $\frac{K_f(1 + \tau p)}{1 + Ap + Bp^2}$  où les termes  $\tau$  et  $K_f$  seront explicités.

c) Montrer que le modèle complet associé à l'axe  $\vec{x}_0$  peut se mettre sous la forme du schéma fonctionnel donné figure 12 où les termes  $F(p)$ ,  $G(p)$  et  $H(p)$  seront explicités.

a) Fonction de transfert  $\frac{V(p)}{U(p)}$  pour  $F_p(p) = 0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{V(p)}{U(p)} \right|_{F_p(p)=0} &= K_D \cdot \frac{\frac{2\beta}{2\beta\lambda + \sigma p} \cdot S \cdot \frac{1}{f + M_{\acute{e}q}p}}{1 + \frac{2\beta}{2\beta\lambda + \sigma p} \cdot S^2 \cdot \frac{1}{f + M_{\acute{e}q}p}} = K_D \cdot \frac{2\beta S}{(2\beta\lambda + \sigma p)(f + M_{\acute{e}q}p) + 2\beta S^2} \\ &= K_D \cdot \frac{2\beta S}{2\beta\lambda f + 2\beta S^2 + (2\beta\lambda M_{\acute{e}q} + \sigma f)p + \sigma M_{\acute{e}q}p^2} = \frac{K_D \cdot \frac{2\beta S}{2\beta(\lambda f + S^2)}}{1 + \frac{2\beta\lambda M_{\acute{e}q} + \sigma f}{2\beta(\lambda f + S^2)}p + \frac{\sigma M_{\acute{e}q}}{2\beta(\lambda f + S^2)}p^2} \\ &= \frac{K_u}{1 + Ap + Bp^2} \end{aligned}$$

avec :  $K_u = K_D \cdot \frac{2\beta S}{2\beta(\lambda f + S^2)}$ ,  $A = \frac{2\beta\lambda M_{\acute{e}q} + \sigma f}{2\beta(\lambda f + S^2)}$  et  $B = \frac{\sigma M_{\acute{e}q}}{2\beta(\lambda f + S^2)}$

b) Fonction de transfert  $\frac{V(p)}{F_p(p)}$  pour  $U(p)=0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{V(p)}{F_p(p)} \right|_{U(p)=0} &= \frac{\frac{1}{f + M_{\text{eq}}p}}{1 + \frac{2\beta}{2\beta\lambda + \sigma p} \cdot S^2 \cdot \frac{1}{f + M_{\text{eq}}p}} = \frac{2\beta\lambda + \sigma p}{(2\beta\lambda + \sigma p)(f + M_{\text{eq}}p) + 2\beta S^2} \\ &= \frac{2\beta\lambda + \sigma p}{2\beta\lambda f + 2\beta S^2 + (2\beta\lambda M_{\text{eq}} + \sigma f)p + \sigma M_{\text{eq}}p^2} = \frac{\frac{2\beta\lambda}{2\beta(\lambda f + S^2)} \left( 2\beta\lambda + \frac{\sigma}{2\beta\lambda} \right) p}{1 + \frac{2\beta\lambda M_{\text{eq}} + \sigma f}{2\beta(\lambda f + S^2)} p + \frac{\sigma M_{\text{eq}}}{2\beta(\lambda f + S^2)} p^2} \\ &= \frac{K_f(1 + \tau p)}{1 + Ap + Bp^2} \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } \boxed{K_f = \frac{2\beta\lambda}{2\beta(\lambda f + S^2)} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\sigma}{2\beta\lambda}}$$

c) D'après le schéma-bloc de la figure 12 on a :  $V(p) = H(p).G(p).U(p) - H(p).F(p).F_p(p)$

$$\text{Donc : } H(p).G(p) = \frac{K_u}{1 + Ap + Bp^2} \quad \text{et} \quad H(p).F(p) = \frac{K_f(1 + \tau p)}{1 + Ap + Bp^2}$$

$$\text{D'où : } H(p) = \frac{1}{1 + Ap + Bp^2}, \quad G(p) = K_u \quad \text{et} \quad F(p) = K_f(1 + \tau p)$$

**Question 15 :** a) Mettre la fonction de transfert  $\frac{V(p)}{U(p)}$  sous forme :  $\frac{V(p)}{U(p)} = \frac{K_u}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$ ,

Donner les expressions de  $\xi$  et  $\omega_n$  en fonction de A et B.

- b) Donner la valeur de  $\xi$  pour que la réponse en vitesse à un échelon de tension  $U_0$  soit la plus rapide possible sans qu'il y ait dépassement
- c) En faisant usage de l'abaque de la **figure 13**, déterminer la valeur de  $\omega_n$  donnant un temps de réponse à 5% égal à 0,5 s.
- d) Déterminer la valeur du gain  $K_u$  assurant une vitesse en régime permanent de 50 m/s pour un échelon de tension  $U_0 = 10$  V en l'absence de la perturbation.
- e) En l'absence de la tension  $U(p)$ , déterminer la position en régime permanent  $x(\infty)$  du chariot 1 suite à une perturbation impulsion de Dirac :  $F_p(t) = a.\delta(t)$  en fonction de  $K_f$ .
- f) Conclure quant la capacité de la commande en chaîne directe à satisfaire l'exigence du cahier de charges en termes de sensibilité à la perturbation.

$$\text{a) } \frac{V(p)}{U(p)} = \frac{K_u}{1 + Ap + Bp^2} = \frac{K_u}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{B}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{A}{2\sqrt{B}}$$

b) Pour que la réponse en vitesse à un échelon de tension  $U_0$  soit la plus rapide possible sans qu'il y ait dépassement il faut prendre  $\xi = 1$ .

c) D'après l'abaque, pour  $\xi = 1$  on a :  $t_{r5\%} \cdot \omega_n = 5 \Rightarrow \omega_n = 5/t_{r5\%} = 5/0,5 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ .

d) En l'absence de la perturbation, la vitesse en régime permanent

$$v(\infty) = K.U_0 \Rightarrow K = v(\infty)/U_0 = 50/10 = 5 \text{ m.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}.$$

$$\text{Donc : } \frac{V(p)}{U(p)} = \frac{5}{(1+0,1p)^2}$$

e) En l'absence de la tension  $U(p)$ , La position en régime permanent est :

$$x(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p.F(p).H(p) \cdot \frac{1}{p} F_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_f(1+\tau p)}{1+Ap+Bp^2} \cdot 1 = K_f$$

f) La commande en chaîne directe est donc sensible une perturbation impulsion. Elle ne jamais satisfaire l'exigence du cahier de charges en termes de sensibilité à la perturbation impulsion.

### **7.3. Synthèse de la loi de commande dédiée à l'asservissement et à la régulation de la position du chariot 1**

#### **7.3.1. Système asservi non corrigé**

La première étude proposée s'intéresse à l'étude de la commande en boucle fermée non corrigé :  $C(p)=1$ .

**Question 16 :** a) Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(p)$  en supposant  $F_p(p)=0$ .  
 b) Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée :  $H_{BF}(p) = X(p)/X_c(p)$ .  
 c) En supposant  $X_c(p)=0$ , déterminer la fonction de sensibilité vis-à-vis de la perturbation définie par :  $H_{préc}(p) = \varepsilon(p)/F_p(p)$ .

a) Fonction de transfert en boucle ouverte :  $H_{BO}(p) = C(p).G(p).H(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{5}{p(1+0,1p)^2}$

b) Fonction de transfert en boucle fermée :

$$H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1+H_{BO}(p)} = \frac{5}{5+p(1+0,1p)^2} = \frac{1}{1+0,2p+0,02p^2}$$

c) Fonction de sensibilité vis-à-vis de la perturbation :

$$H_{préc}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{F_p(p)} = \frac{F(p).H(p) \cdot \frac{1}{p}}{1+H_{BO}(p)} = \frac{\frac{2(1+0,2p)}{p(1+0,1p)^2}}{1+\frac{5}{p(1+0,1p)^2}} = \frac{2(1+0,2p)}{5+p(1+0,1p)^2}$$

**Question 17 :** a) Donner l'écart en régime permanent dû à une entrée échelon :  $x_c(t)=0,01.u(t)$  avec  $u(t)$  la fonction d'Heaviside.  
 b) Déterminer l'écart en régime permanent dû à une perturbation de type impulsion de Dirac :  $F_p(t)=a.\delta(t)$ .  
 c) Conclure quant à la capacité de la commande bouclée non corrigée à respecter les spécifications du cahier de charges en termes de précision.

a) Ecart en régime permanent dû à une entrée échelon :  $\varepsilon_s = 0$  car la classe de  $H_{BO}(p)$  est égale à 1.

b) Ecart en régime permanent dû à une perturbation de type impulsion de Dirac :  $F_p(t)=a.\delta(t)$ .

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p.H_{préc}(p).F_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2(1+0,2p)}{5+p(1+0,1p)^2} \cdot 1 = 0$$

Résultat qu'on pourrait écrire directement vu qu'une commande asservie est toujours insensible aux perturbations impulsions et ceci qu'il y ait présence d'intégration dans la boucle ou pas.

- c) On conclut que la commande bouclée non corrigée est capable de respecter les spécifications du cahier de charges en termes de précision.

**Question 18 :** a) Sur la **figure R5** du **document-réponse DR4**, placer et relever :

- la pulsation  $\omega_{c0}$  de coupure à 0dB.
- les marges de gain et de phase.

b) La commande bouclée non corrigée permet-elle de respecter les critères du cahier de charges relatifs à la rapidité, à la stabilité et l'amortissement de l'axe ?

a) Voir document-réponse DR4

- la pulsation  $\omega_{c0} = 4$  rad/s.
- les marges de gain et de phase :  $MG = 12$  dB et  $MP = 45^\circ$ .

b) La commande bouclée non corrigée permet de respecter le critère du cahier de charges relatif à la stabilité ( $MP \geq 45^\circ$ ) mais pas ceux de la rapidité ( $\omega_{c0} < 10$  rad/s) et de l'amortissement de l'axe (présence de dépassement de la valeur finale)

### 7.3.2. Correction à action proportionnelle

**Question 19 :** a) A partir de la **figure R5** du **document-réponse DR4**, déterminer la valeur  $K_{c1}$  de  $K_c$  permettant de respecter la spécification de rapidité exigé par le CdCF.

b) Tracer sur la **figure R5** du **document-réponse DR4** les diagrammes de gain et de phase du système corrigé par  $K_{c1}$ .

c) Relever les nouvelles valeurs des marges de gain et de phase.

d) Au vu des résultats précédents, est-il possible de valider le choix d'un correcteur à action proportionnel ? Commenter.

a) Valeur  $K_{c1}$  de  $K_c$  permettant de respecter la spécification de rapidité exigée par le CdCF.

Il faudra déplacer le lieu de gain vers le haut pour le faire couper avec l'axe 0 dB en  $\omega = 10$  rad/s.

La valeur de déplacement est  $20\log K_{c1} = 12$  dB c.à.d.  $K_{c1} = 10^{12/20} = 4$ .

b) Voir le document-réponse (le lieu de phase reste inchangé).

c) Nouvelles valeurs des marges de gain et de phase :  $MG = 0$  dB et  $MP = 0^\circ$  le système est devenu juste instable.

d) Il n'est pas possible de valider le choix d'un correcteur à action proportionnel car on ne peut satisfaire à la fois aux exigences de rapidité et de stabilité :

Pour  $K_c = 1$ , le critère de stabilité est satisfait mais pas celui de la rapidité ;

Pour  $K_c = K_{c1}$ , le critère de rapidité est satisfait mais pas celui de la stabilité.

**Question 20 :** A partir de la **figure 15**, justifier pourquoi est-il possible d'approcher le système asservi par un système de deuxième ordre et déterminer ses paramètres caractéristiques :  $K_{BF}$ ,  $\omega_{nBF}$  et  $\xi_{BF}$ .

Il est possible d'approcher le système asservi par un système de deuxième ordre dont le coefficient d'amortissement est inférieur à 1, car la tangente à l'origine est horizontale est que la réponse est oscillante.

Paramètres caractéristiques :

La position en régime permanent est :  $x(\infty) = 0,01.K_{BF}$  et on relève sur le graphe  $x(\infty) = 0,01m$ , donc :  $K_{BF} = 1$ .

Le 1<sup>er</sup> dépassement relatif est  $D_1 = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \Rightarrow \xi = \frac{|\ln(D_1)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(D_1)}}$ , on relève sur le graphe

$$D_1 = \frac{0,0125 - 0,01}{0,01} = 0,25, \text{ donc : } \xi = 0,4.$$

Le 1<sup>er</sup> dépassement a lieu à la demi pseudo-période.

$$\Rightarrow \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0,65s \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{0,65\sqrt{1-\xi^2}}, \text{ donc : } \omega_n \simeq 5,3 \text{ rad.s}^{-1}.$$

### 7.3.3 Correction à actions proportionnelle -dérivée

**Question 21 :** Sur la **figure R6** du **document-réponse DR4**, tracer les diagrammes asymptotiques et l'allure des diagrammes réels de Bode du correcteur  $C_2(p)$ .

Voir Document-réponse DR4.

**Question 22 :** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte corrigé  $H_{B02}(p)$ , donner son ordre, sa classe et son gain statique.

$$H_{B02}(p) = 1,65 \cdot \frac{1+0,24.p}{1+0,04.p} \cdot \frac{5}{p(1+0,1p)^2} = \frac{8,25(1+0,24p)}{p(1+0,04.p)(1+0,1p)^2}$$

Son ordre  $n=4$ , sa classe  $\alpha = 1$  et son gain statique  $K_{B02} = 8,25$ .

**Question 23 :** a) Représenter puis relever les écarts en régime permanent respectivement à une perturbation impulsion  $F_p(t) = a.\delta(t)$  et à un échelon de position  $x_c(t) = 0,01.u(t)$ .  
 b) Représenter puis relever sur le diagramme de Black de la **figure R8** du **document-réponse DR5**, la pulsation  $\omega_{c0}$  de coupure à 0dB, les marges de phase et de gain.  
 c) Au vu des résultats précédents et des spécifications du cahier des charges, est-il possible de valider le correcteur à action proportionnelle-dérivée  $C_2(p)$ ? Commenter.

a) - L'écart en régime permanent à une perturbation impulsion  $F_p(t) = a.\delta(t)$  est **null** car le système est bouclé.

- L'écart en régime permanent à un échelon de position  $x_c(t) = 0,01.u(t)$  est aussi **nul** car la boucle présente une intégration. **Voir document-réponse DR5**
- b) - Pulsation de coupure à 0dB :  $\omega_{c0} = 10 \text{rad.s}^{-1}$ .
  - Marges de phase et de gain :  $MP \simeq 45^\circ$  et  $MG \simeq 12 \text{ dB}$ .
- c) Ce correcteur permet la satisfaction des critères du cahier de charges en termes de précision, rapidité et de stabilité mais pas celui de l'amortissement de l'axe (on voit bien sur le graphe de position la présence d'un dépassement transitoire. On ne peut pas alors le valider.

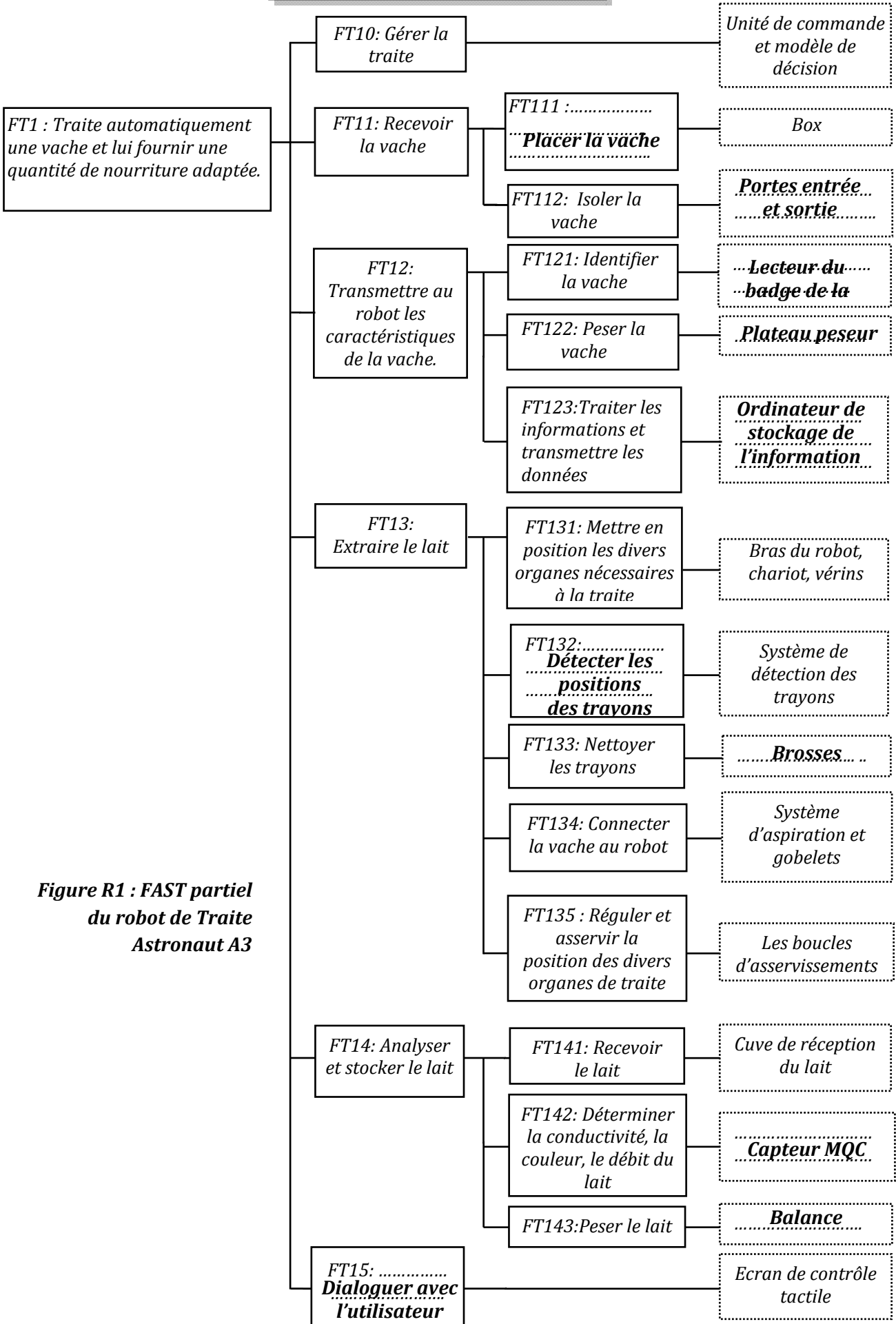
**Question 24 :** a) Relever sur le diagramme de Bode de la **figure 21**, la pulsation  $\omega_{c0}$  de coupure à 0dB ainsi que les marges de gain et de phase.

b) Cette commande permet-elle de respecter les critères de performances définis par le cahier des charges ? Commenter.

- a) - Pulsation de coupure à 0dB :  $\omega_{c0} = 10 \text{rad.s}^{-1}$ .
  - Marges de phase et de gain :  $MP = 77^\circ$  et  $MG = 40 \text{ dB}$ .
- b) Cette commande permet de respecter tous les critères de performances définis par le cahier des charges, en effet :
  - Pour la précision : les écarts dus à la perturbation impulsion et à l'entrée échelon sont tout deux nuls.
  - Pour la rapidité :  $\omega_{c0} = 10 \text{rad.s}^{-1}$  ;
  - Pour la stabilité :  $MP > 45^\circ$  ;
  - Pour l'amortissement de l'axe : on voit bien sur le graphe d'évolution de la position qu'il n'y a pas de dépassement transitoire.

**...Fin**

**DOCUMENT-REPOSE DR1**



**Figure R1 : FAST partiel du robot de Traite Astronaut A3**



**DOCUMENT-REPOSE DR2**

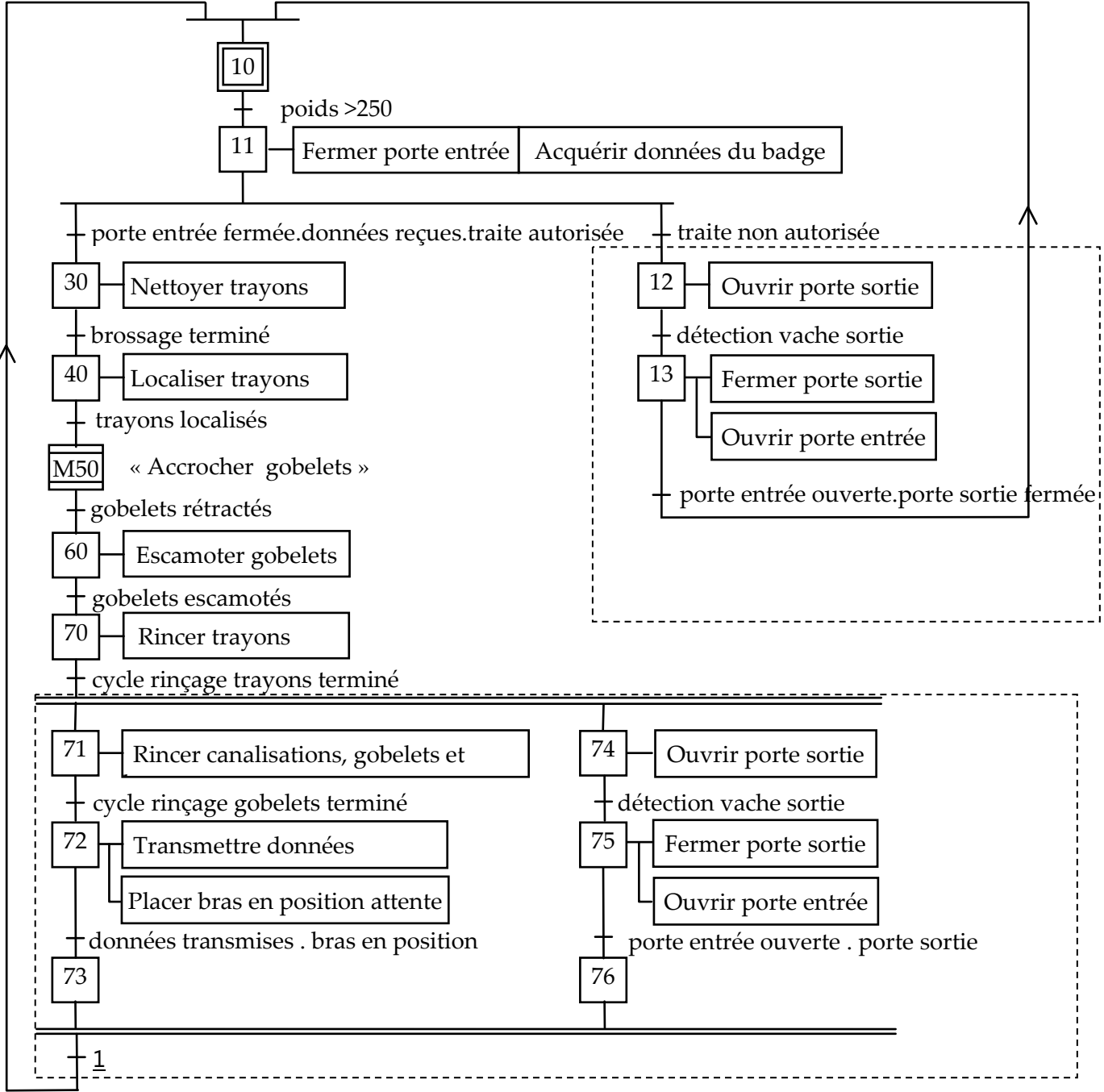


Figure R2 : Grafcet G<sub>1</sub> de gestion des tâches à compléter

**DOCUMENT-REPOSE DR3**

Echelle des vitesses : 0,1 m/s → 1,5 cm

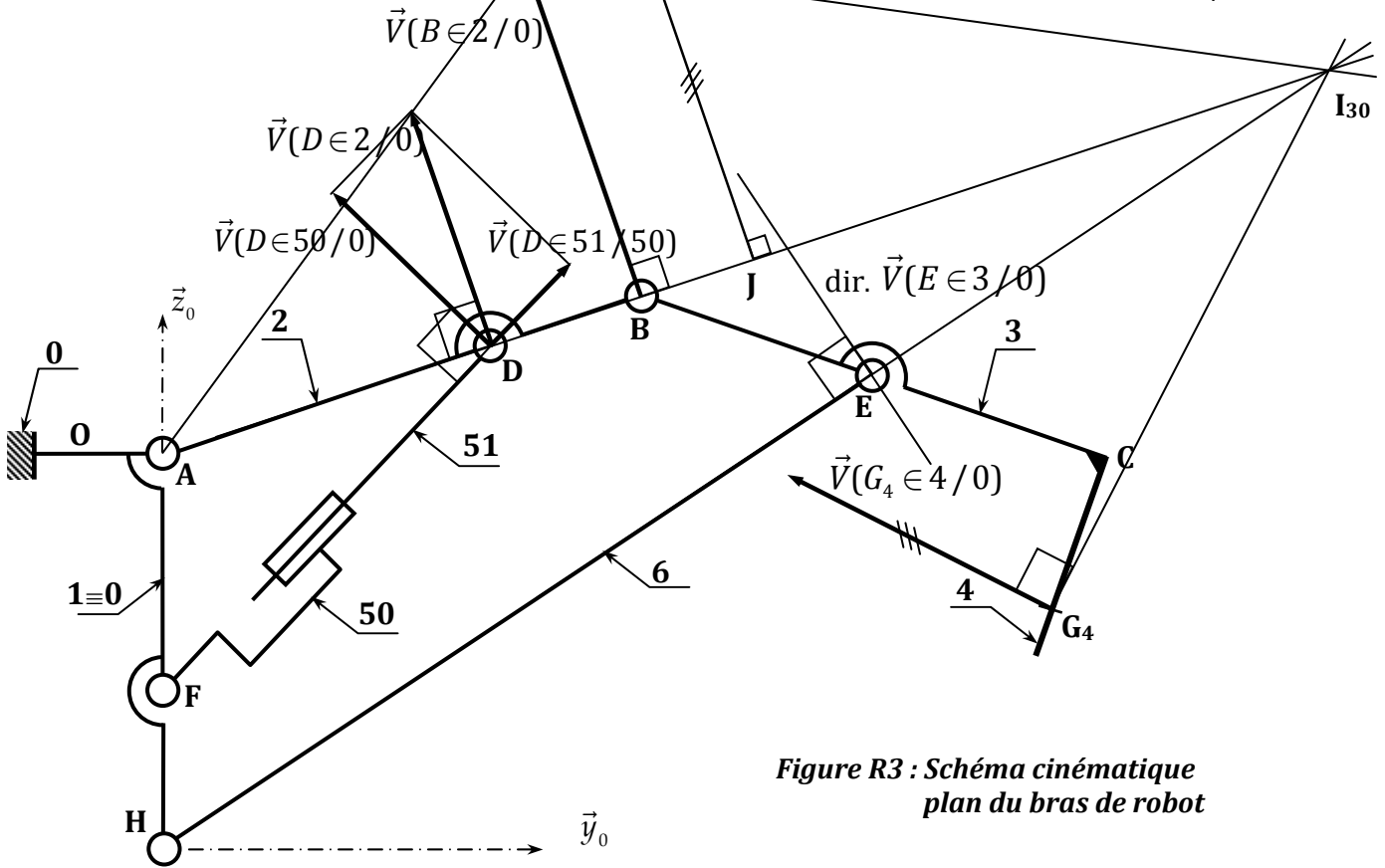


Figure R3 : Schéma cinématique plan du bras de robot

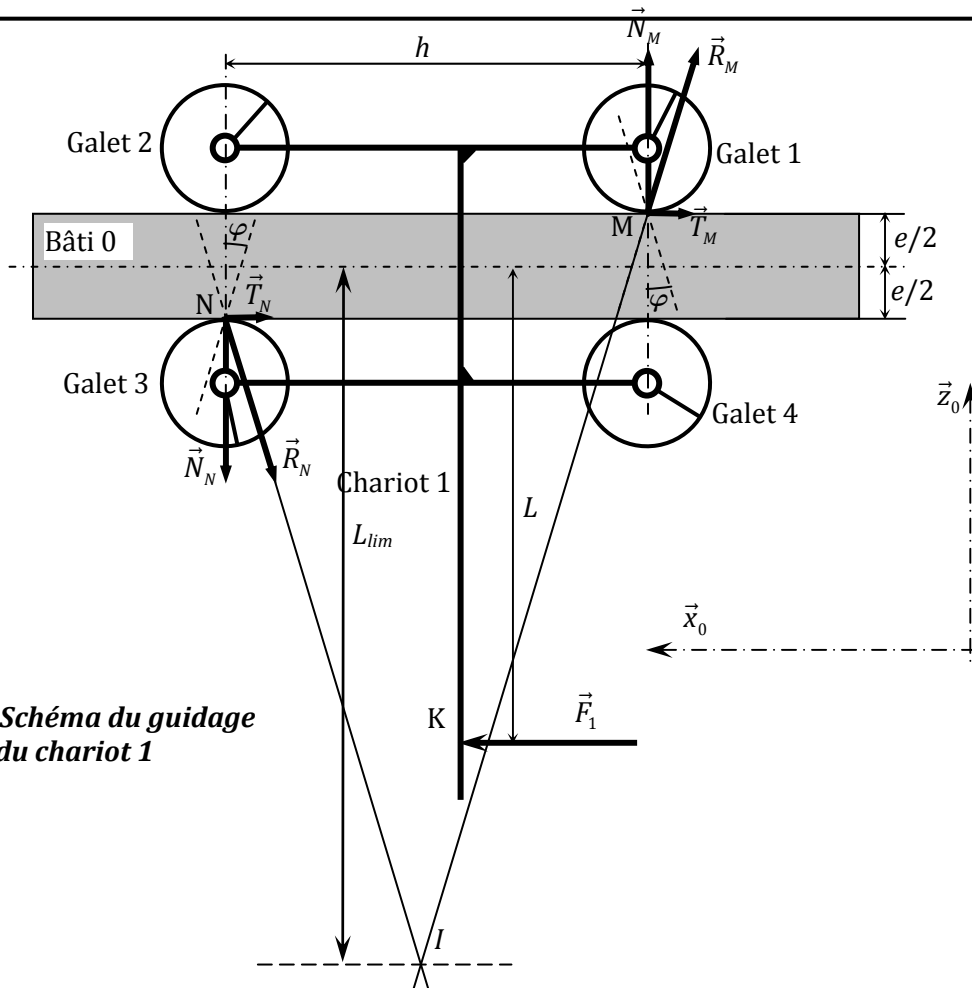


Figure R4 : Schéma du guidage du chariot 1

**DOCUMENT-REPONSE DR4**

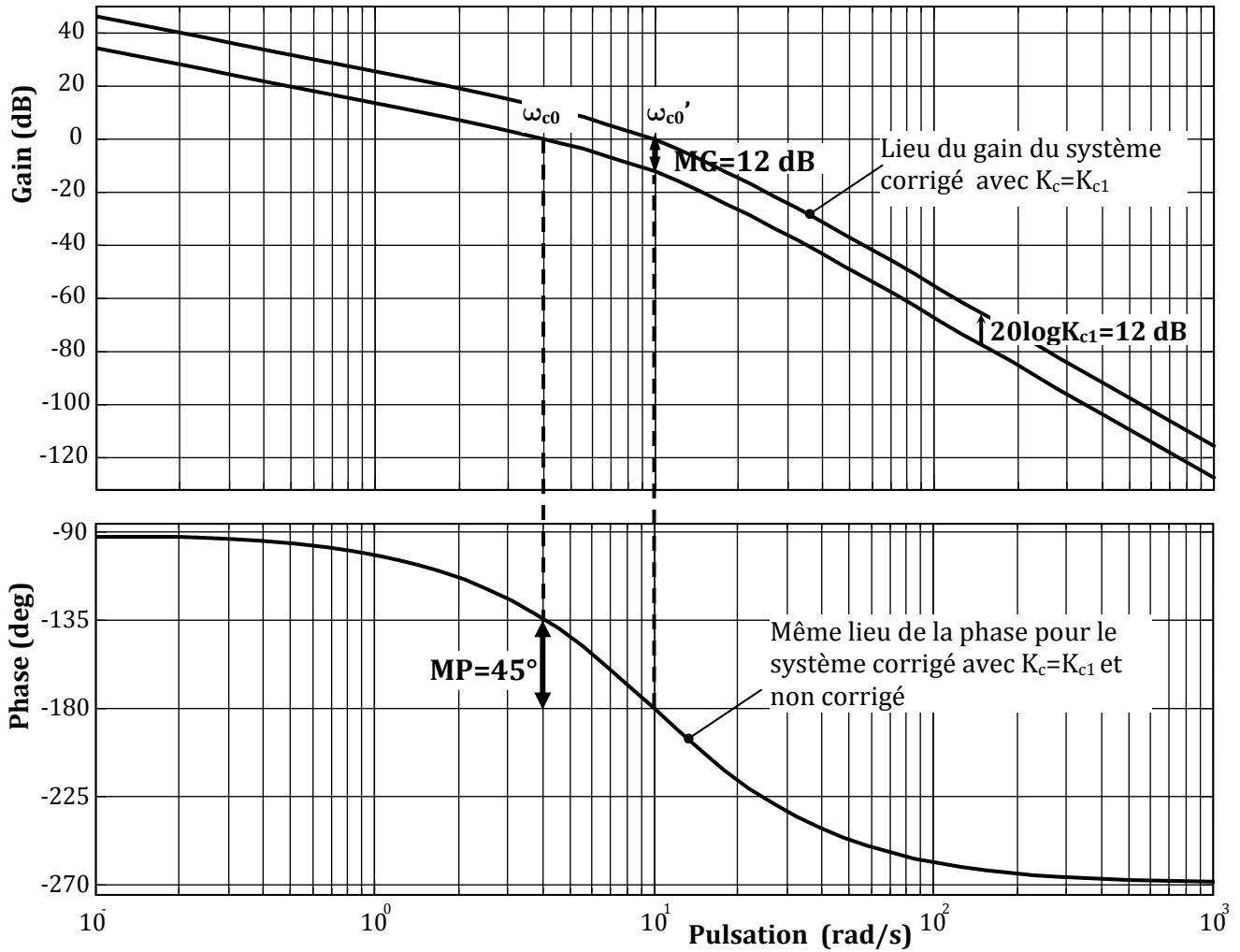


Figure R5 : Diagramme de Bode de la boucle ouverte du système asservi non corrigé

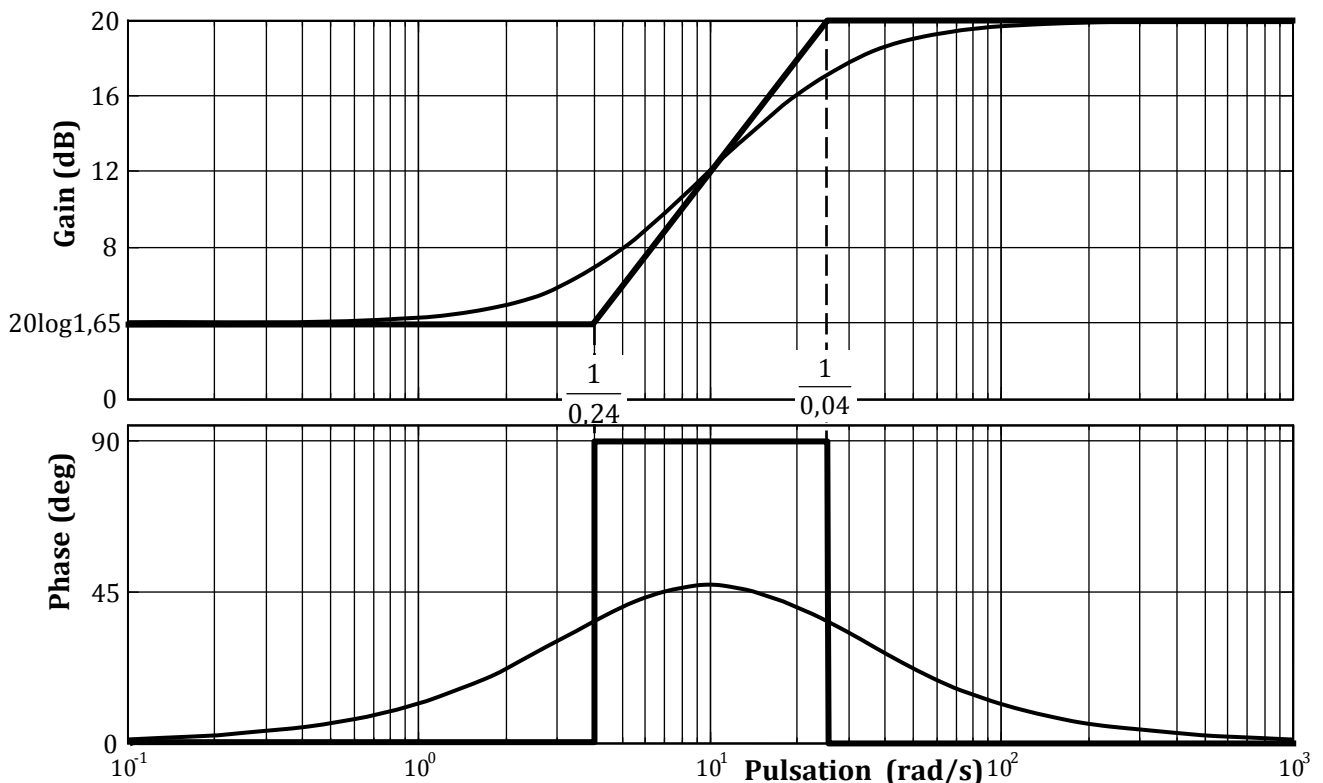


Figure R6 : Diagramme de Bode du correcteur à actions proportionnelle et dérivée  $C_2(p)$

**DOCUMENT-REPONSE DR5**

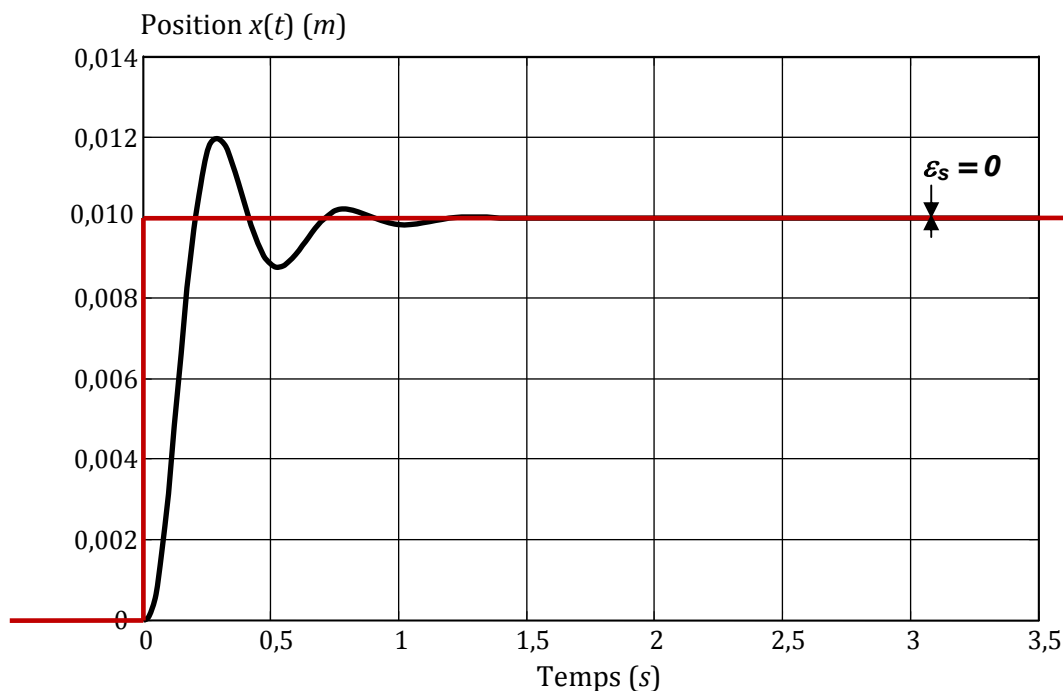


Figure R7 : Position du chariot 1 pour un échelon de position de 0,01 m avec le correcteur  $C_2(p)$

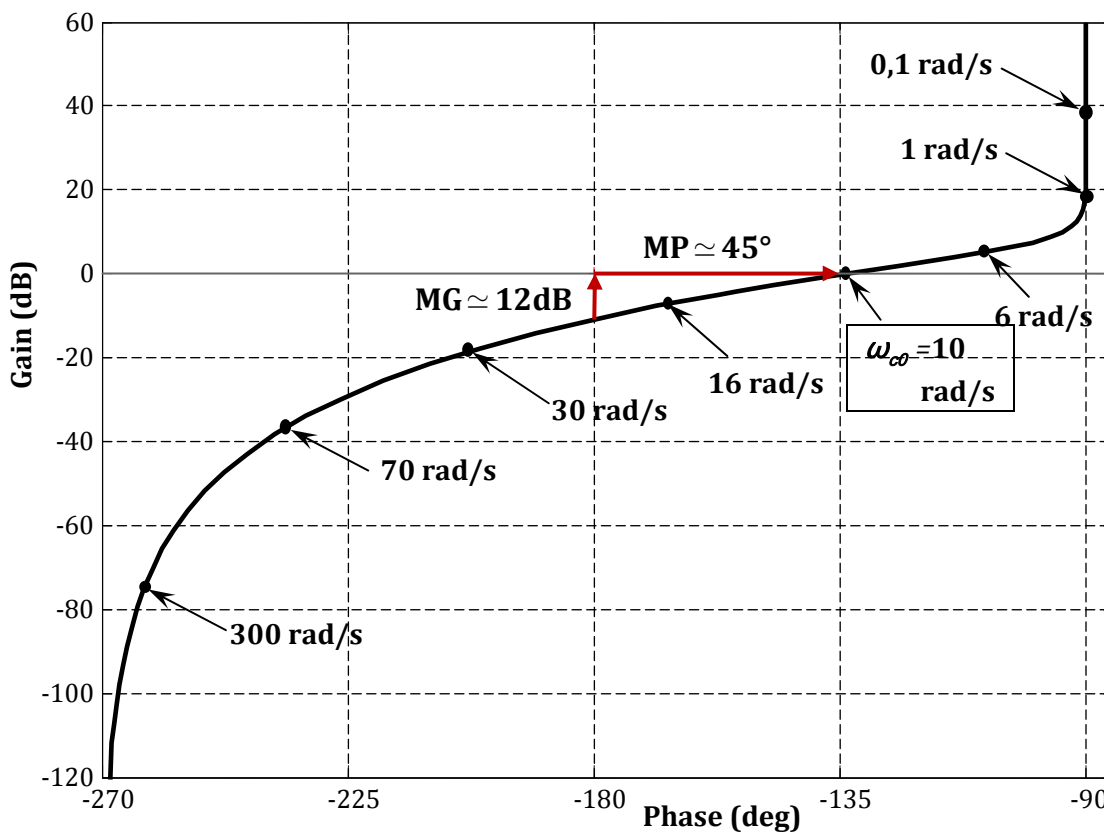


Figure R8 : Diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée avec le correcteur  $C_2(p)$